



ANNÉE SCOLAIRE 2016/2017

FICHE SUR LES CHANGEMENTS DE VARIABLES

09/2016

1 Changement de variable sur $\int_a^b f(x)dx$, f continue sur $[a, b]$

- f est continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$, on propose le changement de variable $x = \varphi(t)$. Pour justifier que ce changement de variable est possible, il faut alors déterminer α et β tels que :
 1. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
 2. φ est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$;
 3. les valeurs prises par φ sur $[\alpha, \beta]$ appartiennent à I i.e. $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Le plus souvent $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$.

On calcule alors $dx = \varphi'(t)dt$ d'où :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- Il arrive parfois que l'on ait à faire un changement de variable $x = \varphi(t)$ sur $\int_\alpha^\beta g(t)dt$. Posons $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Si on peut exprimer t en fonction de x , $t = \psi(x)$, pour $x \in [a, b]$, où ψ est une fonction de classe C^1 , c'est le mieux puisqu'on est ramené au cas précédent.

Sinon, cela signifie qu'il existe une fonction f continue sur $\varphi([\alpha, \beta])$ telle que :

$$\int_\alpha^\beta g(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

On essaie alors d'exprimer $g(t)dt$ sous la forme $f(x)dx$ où f est une fonction continue sur $\varphi([\alpha, \beta])$. Ceci étant fait on peut réaliser le changement de variable :

$$\int_\alpha^\beta g(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

2 Changement de variable sur l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$, f continue sur $]a, b[$

Ne pas oublier que ce théorème est aussi un théorème de convergence.

- f est continue sur $]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on propose le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Pour justifier que ce changement de variable est possible, il faut alors déterminer α et β tels que : φ **réalise une bijection croissante de classe C^1 de $]\alpha, \beta[$ sur l'intervalle $]a, b[$ (ou décroissante de $]\beta, \alpha[$ sur $]a, b[$).**

On calcule alors $dx = \varphi'(t)dt$ d'où :

- Si on ne sait rien sur la convergence de $\int_a^b f(x)dx$, on dit alors que

$$\int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \text{ sont de même nature .}$$

- Si on sait que $\int_a^b f(x)dx$ converge alors on peut affirmer que $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ converge et que l'on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- Il arrive parfois que l'on ait à faire un changement de variable $x = \varphi(t)$ sur $\int_\alpha^\beta g(t)dt$ où g est C^0 sur $]\alpha, \beta[$.

Si on peut exprimer t en fonction de x , $t = \psi(x)$, pour $x \in]a, b[$, où ψ est une fonction monotone de classe C^1 , bijective de $]a, b[$ vers $]\alpha, \beta[$, c'est le mieux puisqu'on est ramené au cas précédent.

Sinon, il faut vérifier que φ **réalise une bijection croissante de classe C^1 de $]\alpha, \beta[$ sur un intervalle $]a, b[$ (ou décroissante de $]\beta, \alpha[$ sur $]a, b[$).**

On essaie alors d'exprimer $g(t)dt$ sous la forme $f(x)dx$ où f est une fonction continue sur $]a, b[$. Ceci étant fait on peut réaliser le changement de variable :

- Si on ne sait rien sur la convergence de $\int_\alpha^\beta g(t)dt$, on dit alors que

$$\int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_\alpha^\beta g(t)dt \text{ sont de même nature .}$$

- Si on sait que $\int_\alpha^\beta g(t)dt$ converge alors on peut affirmer que $\int_a^b f(x)dx$ converge et que l'on a l'égalité :

$$\int_\alpha^\beta g(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$