CORRIGÉ TDM1 - Exo 2

1. On distingue 3 cas :

* si $x \leq -1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2t^2}\,dt$

$$= \lim_{A \to -\infty} \boxed{\left[-\frac{1}{2t}\right]_A^x = -\frac{1}{2x}}.$$

* si $x \in]-1, 1]$, $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\,dt = \frac{1}{2}}$

* si $x \in]1, +\infty[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\,dt +$

$$\int_1^x \frac{1}{2t^2}\,dt = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{2x}$$

---

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}([Y_n \leq x]) = \mathbb{P}([S_n \leq nx])$$

$$\overset{\text{indép.}}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leq nx]) \text{ d'où}$$

on a : $\boxed{\underset{G_n(x)}{\mathbb{P}([Y_n \leq x])} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2nx}\right)^n \text{ si } nx \leq -1 \text{ i.e. si } x \leq -\frac{1}{n} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ si } nx \in [-1, 1[\text{ i.e. } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\\ \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n \text{ si } nx \geq 1 \text{ i.e. } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}}$

3.a. Comme toute fct de répartition G_n est croissante d'où $\forall x \leq 0$, $G_n(x) \leq G_n(0)$ et $G_n(0) = \frac{1}{2^n}$ ce qui prouve la majoration demandée.

b. $x > \frac{1}{n} \iff \frac{1}{x} < n$. D'où si $n_0 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1$ alors $\forall n \geq n_0$, $x > \frac{1}{n}$

Or $\boxed{\text{si } x > \frac{1}{n} \text{ alors d'après la qu 3.b. on a : } G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n \quad \underline{\text{cqfd}}}$

---

c. On a donc :

$\ast$ si $x \leq 0$, $G_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$ et $G_n(x) \geq 0$ d'où

$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 0.$$

$\ast$ si $x > 0$, à partir d'un certain rang $G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n$.

De plus $1 - \frac{1}{2nx} > 0$ d'où $\ln(G_n(x)) = n \ln\left(1 - \frac{1}{2nx}\right)$

Or $\frac{1}{2nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où $\ln(G_n(x)) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\left(-\frac{1}{2nx}\right)$

ie $\ln(G_n(x)) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$ et ainsi $\ln(G_n(x)) \to -\frac{1}{2x}$ qd $n \to +\infty$

On compose par l'exp : $G_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2x}}$

En résumé : $\boxed{G_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{qd } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{2x}} & \text{qd } x > 0 \end{cases}}$

---

b. On a donc : $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{2x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

* G est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{-\frac{1}{2x}} = 0$

d'où G est aussi $\mathcal{C}^0$ en 0.

* Par les th. généraux G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$

Mais il faut aussi montrer que :

* $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$ Immédiat

* G est croissante sur $\mathbb{R}$.

ce qui se montre en calculant la dérivée de G sur $\mathbb{R}^*$ ($x \longmapsto \frac{1}{2x^2} e^{-\frac{1}{2x}}$ sur $]0,+\infty[$)

D'où $\boxed{G \text{ est la f.r. d'une v.a.r à densité}}$

c. On a alors que pour tout x réel,

$$G_n(x) \longrightarrow G(x)$$ où G_n est la f.r. de Y_n et G une fonction de répartition.

On peut donc bien en conclure que :

$$\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \text{ où } Y \text{ est un v.a.r. à densité de f.r } G}$$

---

d. Th. de la bijection avec $\forall x > 0$,

$$G'(x) = \frac{1}{2x^2} e^{-\frac{1}{2x}}$$

d'où $G'(x) > 0$ pour $x > 0$.

---

5. On suppose que Y est à valeurs > 0. Soit $x > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{Y} \leq x\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[Y \geq \frac{1}{x}\right]\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\left[Y \leq \frac{1}{x}\right]\right)$$

$$= 1 - e^{-x/2}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{Y} \leq x\right]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d'où $\boxed{\frac{1}{Y} \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)}$